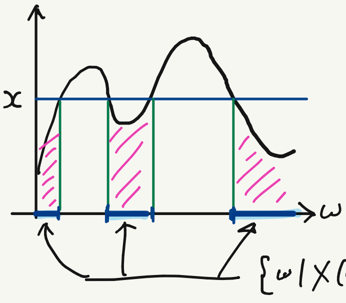
確率数理工学 (2)

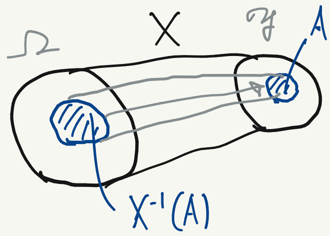
Def (確率変数)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間
関数 $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ が, $\forall x \in \mathbb{R}$ で
$$X^{-1}((-\infty, x]) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqq x\} \in \mathcal{F}$$
を満たす時, X を確率変数 (random variable, r.v.) と呼ぶ。
(r.v. と書く)



例: 日本人をランダムに選ぶ時, その人の身長が 170cm 以下である事象は可測。

注「逆像」
$X: \Omega \to \mathcal{Y}$ として
$A \subset \mathcal{Y}$ に対し,
$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$

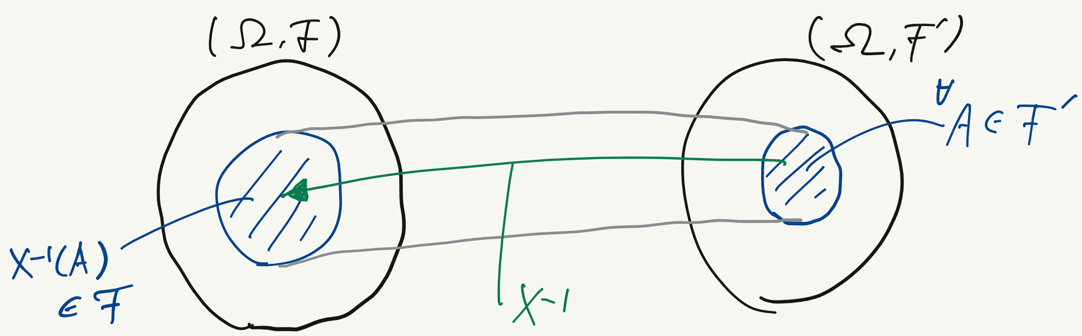


- $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ のことを $\{X \leq x\}$ や $\{X(\omega) \leq x\}$ と書く。
  $\{X \leq x\}$ なる事象が可測 ($\mathcal{F}$ に含まれる) であることから「可測関数」とも言う。

  「確率変数 = 可測関数」

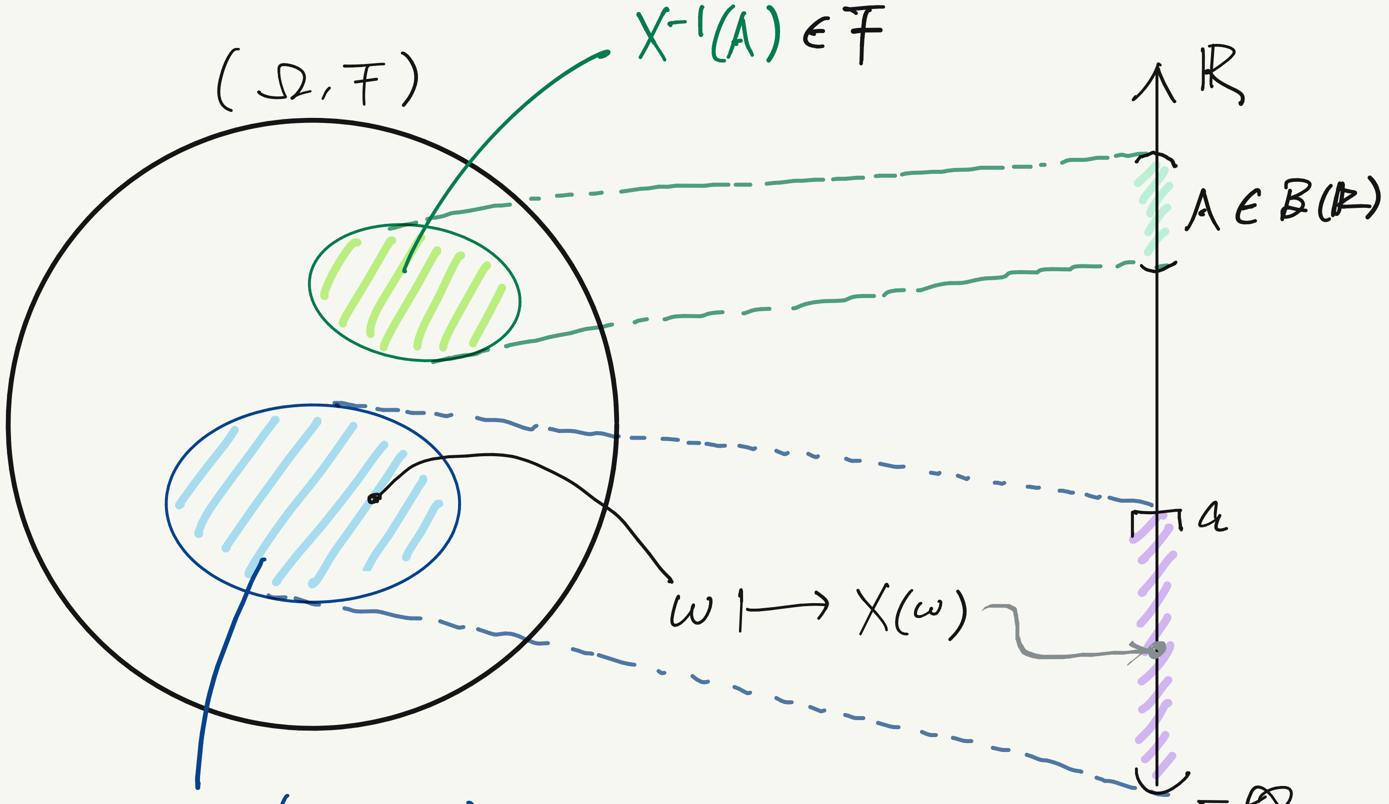
- 任意のボレル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し, $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ であることと, 上記の定義は同値. (証明は後で与える)
- より一般に, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ に対し,
  $X: \Omega \to \Omega'$ が, $\forall A \in \mathcal{F}'$ で $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ をみたす時,
  X を $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-可測関数と言う

(このとき, $X: (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ と書いたりする)



「$X \leq x$ である確率は測れて欲しい」, 「$X \in A$ ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) である確率は測れる」

Ex. $\Omega = \{$金, 銀, 銅, はずれ$\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (全部分集合) ← 確率変数
賞金: $X($金$) = 1000$, $X($銀$) = 100$, $X($銅$) = 10$, $X($はずれ$) = 0$
$P($金$) = 0.1$, $P($銀$) = 0.2$, $P($銅$) = 0.3$, $P($はずれ$) = 0.4$

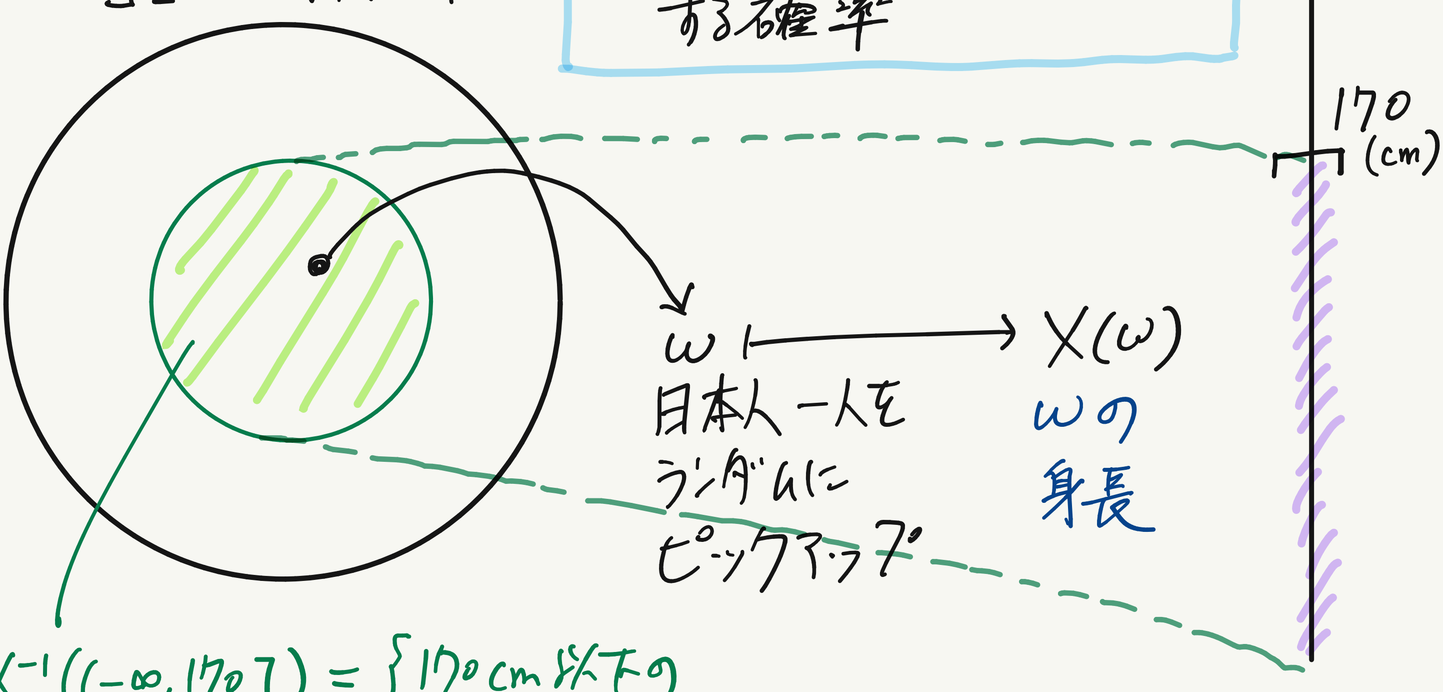


$X^{-1}((-\infty, a])$
$= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$
$\in \mathcal{F}$

例

$P(X \leq 170)$
$= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 170\})$
= 170 cm以下の人をピックアップする確率

Ω = 日本人全体



$X^{-1}((-\infty, 170]) = \{$170 cm以下の日本人$\}$

Thm

$\mathcal{B}=(-\infty,a]$ にかぎらない.

X が r.v. $\Longleftrightarrow$ ${}^{\forall}B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、$X^{-1}(B)\in\mathcal{F}$

Proof

$\Leftarrow$ は自明. なぜなら, ${}^{\forall}a\in\mathbb{R}$ で $(-\infty,a]\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるため.

$\Rightarrow$ を示す.

$\mathcal{B}_0=\{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\mid X^{-1}(B)\in\mathcal{F}\}$ とおく ($\mathcal{B}_0$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の部分集合. これが $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と一致することを示したい)

確率変数の定義より $(-\infty,a]\in\mathcal{B}_0$ $({}^{\forall}a\in\mathbb{R})$ である.

しかも. $\mathcal{B}_0$ が σ-加法族であることもわかる. なぜなら

(1) $X^{-1}(\mathbb{R})=\Omega\in\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ の定義より) なので. $\mathbb{R}\in\mathcal{B}_0$

(チェックせよ)

(2) $A\in\mathcal{B}_0 \Longrightarrow X^{-1}(A)\in\mathcal{F}\Rightarrow (X^{-1}(A))^c\in\mathcal{F}\Rightarrow X^{-1}(A^c)\in\mathcal{F}$

$\mathcal{B}_0$ の定義

$\Rightarrow A^c\in\mathcal{B}_0$

(3) $A_1,A_2,\dots\in\mathcal{B}_0 \Rightarrow X^{-1}(A_n)\in\mathcal{F}\ ({}^{\forall}n) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}X^{-1}(A_n)\in\mathcal{F}$ ($\because \mathcal{F}$ は σ-加法族)

$\Rightarrow X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\in\mathcal{F}$ ($\because \bigcup_{n=1}^{\infty}X^{-1}(A_n)=X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$)

チェックせよ ∵演習問題

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{B}_0$

以上より $\mathcal{B}_0$ は $\{(-\infty,a]\mid a\in\mathbb{R}\}$ を含む最小の σ-加法族を含む

それは $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ である ($\because$ 次ページの Lem より).

つまり, $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{B}_0$ となるので, $\Rightarrow$ が示せた.

//

部分集合族$\mathcal{A}$に対し、$\mathcal{A}$を含む最小のσ-加法族を$\sigma(\mathcal{A})$と書く。

Lem

$\mathcal{A} = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ に対し、$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ //

Proof

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ はすぐわかる。よって、$\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。

逆の $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ を示す。そのためには、$\sigma(\mathcal{A})$ が任意の開集合を含むことを示せば良い。

これは、任意の開集合 B は、可算無限個の開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ の和集合として書けることが示せれば十分である。

なぜなら、開区間 (a, b) は $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b-\frac{1}{n}] \setminus (-\infty, a]$ と書けることから、$\sigma(\mathcal{A})$ に入り、$\sigma(\mathcal{A})$ の元の可算無限和で B が表せるならσ-加法性より $B \in \sigma(\mathcal{A})$ となるからである。

任意の $x \in B$ に対し、B は開集合であることから ある $\varepsilon > 0$ が存在して、$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B$ とできる。

すると、ある有理数 q, δ が存在し、

$$x \in (q-\delta, q+\delta) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B$$

とできる。

(たとえば、$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ を1つとってきて、$(x-\delta, x+\delta)$ から1つ $q \in \mathbb{Q}$ を取ってくれば良い。)

このように、各 x ごとに、ある $q_x \in \mathbb{Q}$, $\delta_x \in \mathbb{Q}$ が存在して、$I_x = (q_x - \delta_x, q_x + \delta_x)$ とおけば、$B \subset \bigcup_{x \in B} I_x$ である。

一方 $\forall x \in B$ で $I_x \subset B$ なので、$\bigcup_{x \in B} I_x \subset B$。よって、$B = \bigcup_{x \in B} I_x$ である。

さらに、q_x, δ_x はともに有理数なので、 ※ $\mathbb{Q}$ は可算集合

$$B = \bigcup \{(q-\delta, q+\delta) \mid q, \delta \in \mathbb{Q}, \delta > 0, \exists x \in B \text{ で } q = q_x, \delta = \delta_x \text{ である}\}$$

と書けるので、これは区間の高々可算和。

よって、$^\forall B$: 開集合 は $B \in \sigma(\mathcal{A})$ である。 //

- $X : \Omega \longrightarrow \Omega'$

Ω'の部分集合族 $\mathcal{B}'$ に対し、$\sigma(\mathcal{B}')$を$\mathcal{B}'$を含む最小のσ-加法族とする。

$\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{B}')$ なら、

「 Xが可測 $\iff$ ${}^\forall A \in \mathcal{B}'$ に対し、$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ 」

$\mathcal{F}'$ではない。

が成り立つ。

($\mathcal{B}'$は$\mathcal{F}'$を"生成"する。Xの$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-可測性を担保するには、$\mathcal{B}'$における可測性のみ調べれば十分)。　(演習問題参照)

- $X_1 : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$, $X_2 : (\Omega', \mathcal{F}') \longrightarrow (\Omega'', \mathcal{F}'')$ (可測関数)

に対し、

$X_3 = X_2 \circ X_1 : \omega \in \Omega \longmapsto X_2(X_1(\omega)) \in \Omega''$ も $\mathcal{F}/\mathcal{F}''$-可測。

Lem

$(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ のとき、$X : \Omega \to \mathbb{R}$ が連続なら
X は可測

(Proof) $X^{-1}((a,\infty))$ は開集合なので（X の連続性より）、
$X^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。よって $X^{-1}((-\infty,a]) = \left(X^{-1}((a,\infty))\right)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
でもある。 //

Def（分布関数） ☆重要

X : r.v. ← random variable の略

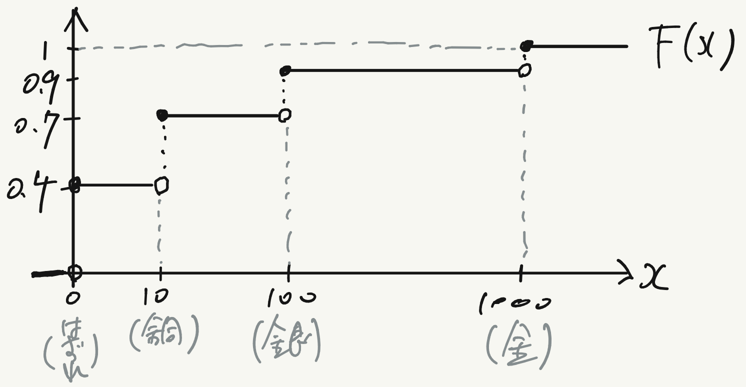
$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqq x\}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

とすると、F を X の (累積)分布関数 と言う。
(cumulative distribution function, c.d.f.)

$F(x) = P(X \leqq x)$ や、$F(x) = P(\{X(\omega) \leqq x\})$ とも記す。 //

↑ F が定義されるためには
$\{X \leqq x\}$ が可測である必要がある。
X が r.v. なら、その可測性が担保される。

先のくじびきの例：

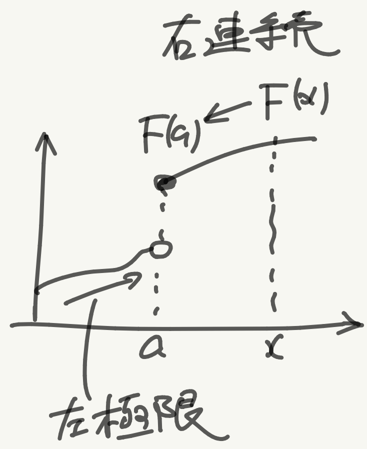


Thm（分布関数の性質）

(1) $x < y \implies F(x) \leqq F(y)$ （単調非減少）

(2) $\displaystyle\lim_{x \searrow a+0} F(x) = F(a)$ （右連続）

(3) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$



※ $\displaystyle\lim_{x \nearrow a-0} F(x) = F(a)$ とは限らない。
しかし、左極限は存在する。

$$\boxed{P(X=a) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)}$$
である。

(Proof)

(1) $A = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$, $B = \{\omega \mid X(\omega) \leq y\}$ とおくと、

$x \leq y$ より、$A \subset B$ である。

確率の単調性より $P(A) \leq P(B)$ である。

(2) $x_1 > x_2 > \cdots > a$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ である数列を考える。

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X(\omega) \leq x_n\}}_{A_n \text{とする}} = \underbrace{\{X(\omega) \leq a\}}_{A \text{とする}}$$

に注意すると、

⊃ はすぐわかる

⊂ : $X(\omega) > a$ なら $\exists n$ で $X(\omega) > x_n$ となるので、その ω は $\bigcap_{n=1} \{X(\omega) \leq x_n\}$ に入らない。

確率の連続性より、

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A) = F(a)$$

である。

(3) も同様。

//

Remark (次回、より詳しく述べる)

逆に (1)〜(3) をみたす $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在したら、

対応する $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 Q が一意に存在する。

その Q は $Q((-\infty, a]) = F(a)$ ($^\forall a \in \mathbb{R}$), $Q((a, b]) = F(b) - F(a)$ ($^\forall a < b$)

をみたす。

$$\underset{(測度)}{Q} \longleftrightarrow \underset{(分布)}{F}$$

P を調べる代わりに、F を調べた方が楽なことが多い。(弱収束など)

$$\begin{tikzcd}
\underset{P}{\Omega} \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "Q = X_\# P"'] & \underset{F}{\mathbb{R}} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{一意に定まる}"] \\
 & Q
\end{tikzcd}$$

$Q(A) = P(X^{-1}(A))$ でもある。

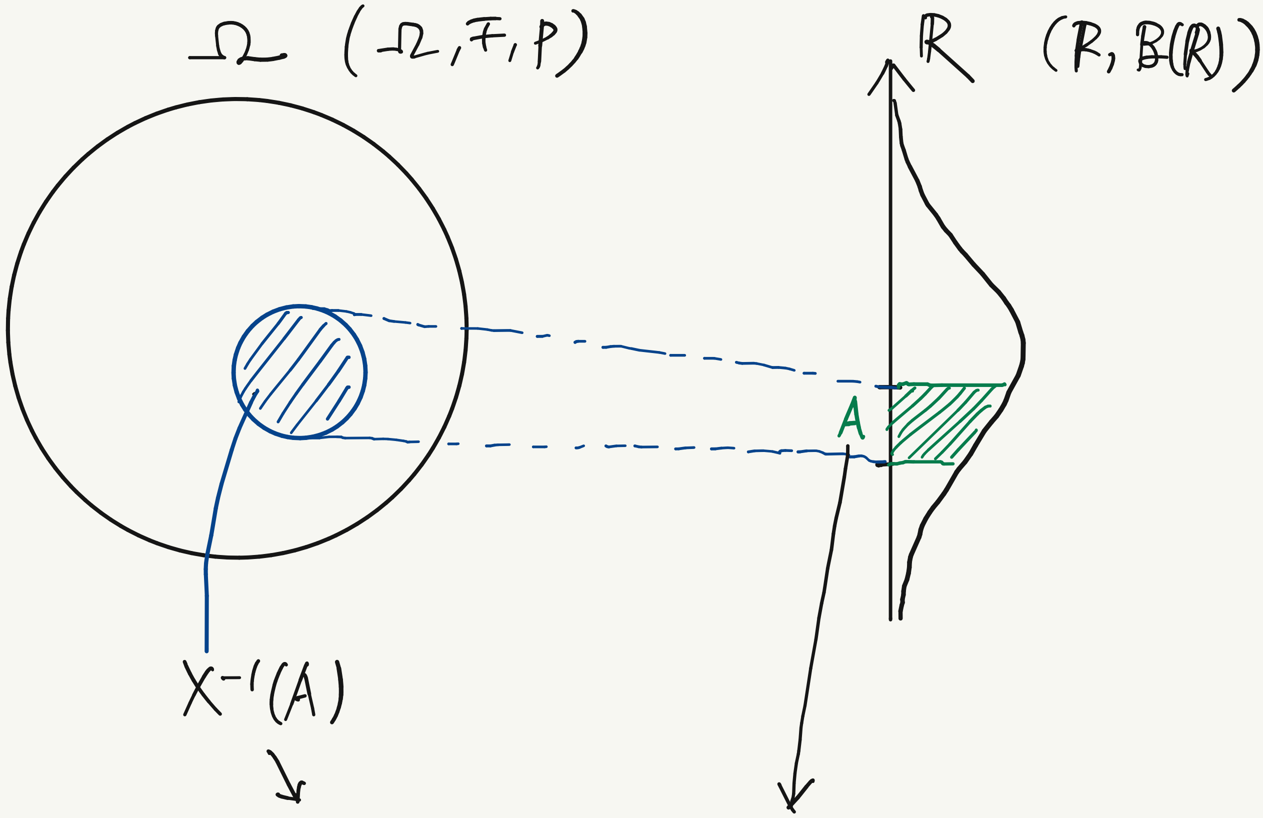
$Q(A) = P(X^{-1}(A)) = P(X \in A)$

でもあり、これを

P の X による push-forward と

言う。

$Q = X_\# P$ とも書く。



$$P(X^{-1}(A)) = Q(A)$$

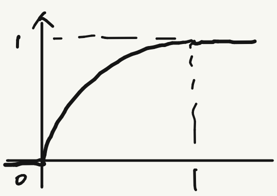
例： $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, P: Ω 上の一様分布

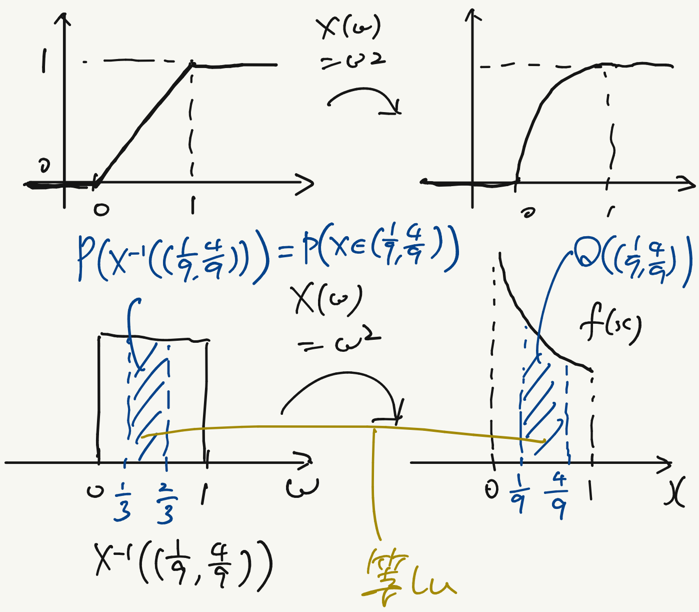
$X(\omega) = \omega^2$ なら $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega^2 \leq x\}$

$= \underbrace{\{0 \leq \omega \leq \sqrt{x}\}}$ (for $0 \leq x \leq 1$)

$P(\{0 \leq \omega \leq \sqrt{x}\}) = \sqrt{x}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \sqrt{x} & (0 < x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$





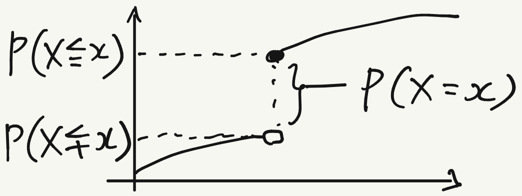
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & (0 < x \leq 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

確率分布の種類

- 連続
  - 絶対連続
  - 特異連続
- 離散

Def (連続分布)

$\forall x \in \mathbb{R}$ において $F(x)$ が連続. つまり $P(X=x)=0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$.



($X:\Omega\to\mathbb{R}$ の連続性とは関係ないことに注意)

反例を作ってみよ.

Def (絶対連続分布) (Borel 可測)

F が連続で, ある非負関数 f を用いて

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

と書けるとき, その分布は絶対連続であると言う.

f を確率密度関数 (probability density function, p.d.f.) と言う

($A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し, $P(X\in A)=\int_A f(x)\,dx$ も成り立つ.)

※ 絶対連続なら連続である.

Thm (Radon-Nikodym の定理)

μ をルベーグ測度とする.

$\mu(E)=0$ をみたす任意の $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ について, $P(E)=0$ である.

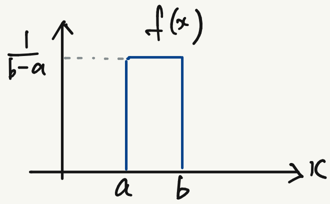
$\Longleftrightarrow$ F は絶対連続 //

こちらを定義としても良い.

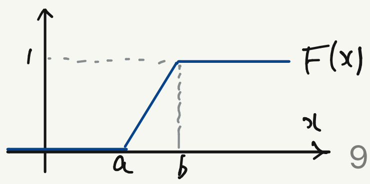
Ex. (一様分布)

区間 $[a,b]$, $U[a,b]$: $[a,b]$ 上の一様分布

p.d.f. $\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & (x\in[a,b])\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$



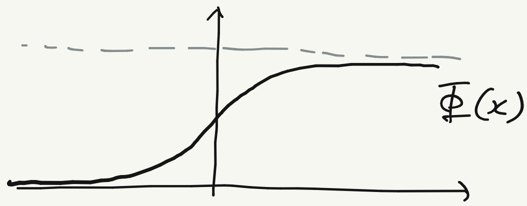
c.d.f. $\quad F(x)=\begin{cases}0 & (x<a)\\ \frac{x-a}{b-a} & (x\in[a,b])\\ 1 & (x>b)\end{cases}$



Ex. (正規分布) ← 「ガウス分布」とも言う

平均 $\mu \in \mathbb{R}$, 分散 $\sigma^2 > 0$

p.d.f. $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$ ← 覚える



$N(\mu, \sigma^2)$ で表す

$N(0, 1)$ を <u>標準正規分布</u> と言う

c.d.f. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ を 誤差関数と言う
(error function)

Def (特異連続分布) ← (今は覚えなくても良い)

F は連続であり、かつある $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$P(X \in E) = 1$ かつ $\mu(E) = 0$ (ルベーグ測度)

が成り立つ時、<u>特異連続</u>であると言う ← 連続分布だが、密度関数をもたない!

Ex.

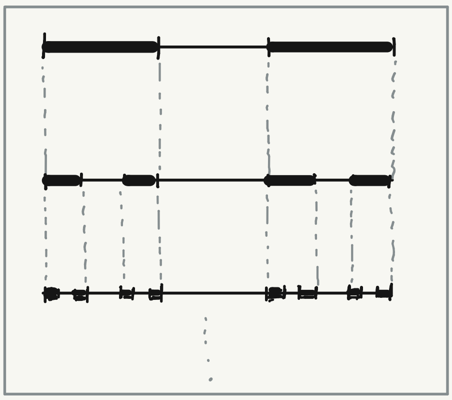
$\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1))$,

P を $[0,1)$ 上の一様分布とする。

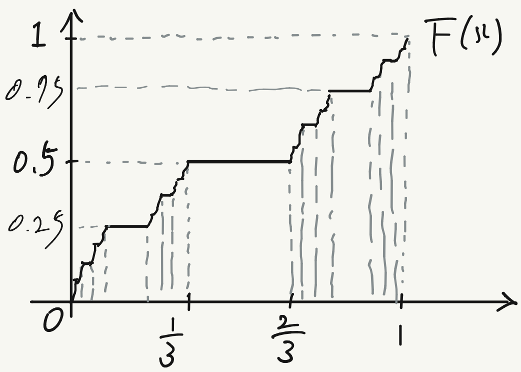
$X : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ なる2進数展開を用いて

$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n}$ とする。



K



カントール集合 K に対し、

$P(X \in K) = 1$

一方、

$\mu(K) = 0$ (Kは非可算濃度だが、ルベーグ測度 $= 0$)

である。

$\left(\mu(K) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \cdots = 0\right)$

(注: カントール集合: 線分 $[0,1]$ を3等分して線分の真ん中の領域を取り除くという操作を再帰的に繰り返して得られる集合。)

Def (離散分布)

Xの取りうる範囲が高々可算個.
つまり、ある $V = \{v_1, v_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ が存在して.(有限個でも良い)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = v_k) = 1$$

が成り立つとき、離散分布と言う.

$$f(v_k) = P(X = v_k)$$

のことを、確率質量関数と言う.
(probability mass function, p.m.f.) //

分布関数は $F(x) = \sum_{k : v_k \le x} f(v_k)$ で与えられる.

Ex. (Bernoulli分布)

$V = \{0, 1\}$, $0 \le \theta \le 1$

p.m.f. $f(1) = \theta$, $f(0) = 1 - \theta$

$Ber(\theta)$ と記す.

コイン投げ1回
表: 1
裏: 0.

Ex. (二項分布)

$V = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$

$0 \le \theta \le 1$.

p.m.f. $f(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$

$B(n, \theta)$ と記す.

n回のコイン投げで表が出た回数 k の分布.

Ex. (Poisson分布)

$V = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\lambda > 0$

p.m.f. $f(k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

cf. 稀に起こる現象が一定期間内に起きる回数の分布:
- 工場で1日に生産される不良品の数
- 宇宙線を1時間に観測する回数

(補足)

Thm (ルベーグの分解定理)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P は、
絶対連続な分布 P_1, 特異連続な分布 P_2, 離散分布 P_3
に分解できる. すなわち、$0 \le \theta_1, \theta_2, \theta_3 \le 1$, $\theta_1+\theta_2+\theta_3=1$
である $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を用いて.

$$P = \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \theta_3 P_3$$

と分解でき、さらにこの分解は一意である. //